SIFAT DETERMINAN MATRIKS QUATERNION KOMPLEKS

Andi Riza Safitri, Amir Kamal Amir, dan Nur Erawaty

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Hasanuddin (UNHAS)
Jl. Perintis Kemerdekaan KM 10 Makassar 90245, Indonesia
rizasafitri23@gmail.com

CHARACTERISTICS OF DETERMINAN OF COMPLEX QUATERNION MATRICES

Andi Riza Safitri, Amir Kamal Amir, dan Nur Erawaty

Mathematics Department
Faculty of Mathematics and Natural Sciences
Hasanuddin University (UNHAS)
Jl. Perintis Kemerdekaan KM. 10 Makassar 90245, Indonesia
rizasafitri23@gmail.com

ABSTRAK

Misalkan $A = A_0 + A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3$ adalah matriks quaternion $\mathbb{Q}^{nxn}$. Representasi kompleks dari A adalah $\Psi(A) = \begin{bmatrix} A_0 + A_1 i & -(A_2 + A_3 i) \\ A_2 - A_3 i & A_0 - A_1 i \end{bmatrix}$. Salah satu definisi determinan matriks quaternion didefinisikan melalui representasi kompleksnya, yaitu $\det(A) = \det \Psi(A)$. Penelitian ini meneliti sifat-sifat determinan matriks quaternion yang didefinisikan seperti diatas. Hasil penelitian menunjukkan bahwa ada beberapa sifat determinan matriks biasa juga berlaku untuk determinan matriks quaternion. Namun demikian, ditemukan juga beberapa sifat determinan matriks biasa yang tidak berlakupada determinan matriks quaternion.

Keywords : *Isomorfisma,Quaternion, Determinan Matriks Real, Determinan Matriks Quaternion, Invers Matriks..*

ABSTRACT

Let $A = A_0 + A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3$ by a quaternion matrix $\mathbb{Q}^{nxn}$. Complex representation of A is $\Psi(A) = \begin{bmatrix} A_0 + A_1 i & -(A_2 + A_3 i) \\ A_2 - A_3 i & A_0 - A_1 i \end{bmatrix}$. One of quaternion matrix determinant is defined by its complex of matrix representation, that is $\det(A) = \det \Psi(A)$. The research examines the characteristics of determinant of quaternion matrix that defined as above. The result of research show there are some characteristic of determinant of real matrix that applies to determinant of quaternion matrix. However, there are some charecteristies of determinant of real matrix that unapplies to determinant of quaternion matrix were also found.

Keywords : *Isomorphism, Quaternion, Determinant of Real Matrix, Determinant of Quaternion Matrix, Inverce Matrix..*

I. PENDAHULUAN

Dalam fungsi aljabar terdapat fungsi kompleks. Fungsi kompleks terdiri dari bilangan kompleks yang didefinisikan dari suatu kombinasi linear dari pasangan terurut dari dua komponen. Dua komponen tersebut adalah satu bagian bilangan real dan satu bagian imajiner. Pada kenyataannya terdapat bilangan yang lebih luas dari bilangan kompleks ($\mathbb{C}$). Bilangan tersebut adalah bilangan quaternion. Bilangan quaternion memiliki empat komponen, yaitu satu bilangan real dan tiga bagian imajiner.

Matriks quaternion kompleks adalah matriks yang entri-entrinya merupakan bilangan quaternion kompleks. Apabila membahas soal matriks, selalu terkait dengan masalah determinan matriks. Determinan matriks adalah jumlah semua perkalian elementer yang bertanda dari A dan dinyatakan dengan $\det(A)$. Determinan matriks hanya diperoleh oleh matriks persegi. Untuk menyelesaikan masalah determinan matriks tidak harus diselesaikan dengan mengunakan rumus determinan. Ada beberapa sifat yang dapat membantu menyelesaikan permasalahan determinan agar penyelesaian permasalahan determinan matriks menjadi lebih mudah.

Ada beberapa sifat-sifat determinan matriks dengan melalui matriks representasi kompleksnya. Sehingga untuk mendapatkan bentuk representasi matriks kompleks dibutuhkan isomorfisma dari matriks quaternion kompleks.

Beberapa peneliti sebelumnya sudah menemukan sifat-sifat determinan matriks quaternion kompleks melalui representasi kompleksnya. Namun demikian, sifat-sifat tersebut yang sudah ditemukan belum dilengkapi dengan pembuktian-pembuktian.

II. TINJAUAN PUSTAKA

A. Gelanggang

Definisi 2.1. *Ring* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *adalah sistem aljabar yang terdiri dari himpunan*$\mathbb{R}$ *yang tak kosong dan dua operator biner yaitu operator "+" dan operator kali (dalam notasi juxtaposition) sedemikian hingga kedua aksioma berikut dipenuhi:*

1. $(\mathbb{R}, +)$ *adalah grup abel dengan unsur netral diberi lambang 0;*
2. $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ *membentuk struktur aljabar dengan empat sifat-sifat berikut:*
   a. *Tertutup: Untuk setiap* $a, b \in \mathbb{R}$ *berlaku* $ab \in \mathbb{R}$.
   b. *Assosiatif: Untuk setiap* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *berlaku* $(ab)\ c = a\ (bc)$.
   c. *Distributif kanan: Untuk setiap* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *berlaku* $a\ (b + c) = ab + ac$.

Distributif kiri: Untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{R}$ *berlaku* $(a + b)\ c = ac + bc$.

B. Homomorfisma Gelanggang

Definisi 2.2. *Misalkan* R *dan* R' *adalah dua gelanggang. Pemetaan* $\varphi: R \to R'$ *disebut homomorfisma gelanggang jika memenuhi kedua syarat berikut: untuk setiap* $a, b \in R$ *berlaku*

1. $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$,
2. $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.

C. Isomorfisma Gelanggang

Definisi 2.3. *Misalkan* R *dan* R' *adalah dua ring. Pemetaan* $\varphi: R \to R'$ *disebut isomorfisma ring jika memenuhi kedua syarat berikut :*

a) *Homomorfisma ring*
b) *Bijektif*

D. Quaternion

Definisi 2.4. *Quartenion merupakan bilangan yang representasi geomterinya berada di* R^4 *dengan bentuk :*

$$\mathbb{Q} = q_0 + q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3$$

Dimana $q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}$ dan e_1, e_2, e_3 adalah bagian imajiner yang memenuhi sifat perkalian Hamilton.

E. Operasi pada Quaternion

Definisi 2.5. *Operasi penjumlahan dan perkalian pada bilangan quaternion yaitu:*

Misal diberikan dua bilangan quaternion :

$q = q_o + q_1e_1 + q_2e_2 + q_3e_3$

$p = p_0 + p_1e_1 + p_2e_2 + p_3e_3$

a) *Operasi penjumlahan*

Diperoleh hasil penjumlahan, yaitu

$$q + p = (q_o + q_1e_1 + q_2e_2 + q_3e_3) + (p_1e_1 + p_2e_2 + p_3e_3)$$
$$= (q_0 + p_0) + (q_1 + p_1)e_1 + (q_2 + p_2)e_2 + (q_3 + p_3)e_3$$

b) *Operasi perkalian*

Misal diberikan bilangan quaternion

Diperoleh hasil perkalian, yaitu

$$qp = (q_o + q_1e_1 + q_2e_2 + q_3e_3)(p_0 + p_1e_1 + p_2e_2 + p_3e_3)$$
$$= (q_0p_0 - q_1p_1 - q_2p_2 - q_3p_3) + (q_0p_1 + q_1p_0 + q_2p_3 - q_3p_2)e_1$$
$$+ (q_0p_2 - q_1p_3 + q_2p_0 + q_3p_1)e_2 + (q_0p_3 + q_1p_2 - q_2p_1 + q_3p_0)e_3$$

F. Isomorfisma Matriks Quaternion Kompleks ke Matriks

Aljabar quaternion kompleks dikenal sebagai ruang vektor berdimensi empat atas field (lapangan) bilangan kompleks $\mathbb{C}$ dengan basis-basisnya adalah $1, e_1, e_2, e_3$ memenuhi aturan perkalian. Sehingga, sebarang anggota $\mathbb{Q}^{nxn}$ dapat dituliskan sebagai berikut

$$A = A_0 + A_1e_1 + A_2e_2 + A_3e_3$$

Berdasarkan persamaan diatas, bilangan real, bilangan kompleks, dan quaternion real, ketiganya dapat dianggap sebagai kasus khusus dari quaternion kompleks. Berdasarkan pemetaan ini, tiap elemen $A = A_0 + A_1e_1 + A_2e_2 + A_3e_3$, $A \in \mathbb{Q}^{n\,x\,n}$. memiliki sebuah perwakilan matriks quaternion yang tepat, seperti ditunjukkan dibawah ini

$$\Psi(A) := \begin{bmatrix} A_0 + A_1i & -(A_2 + A_3i) \\ A_2 - A_3i & A_0 - A_1i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2mx2n}$$

Berikut disebutkan terminology pada quaternion kompleks. Untuk $a = a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$, *dual quaternion* (quaternion dual) dari a adalah

$$\bar{a} = a_0 - a_1e_1 - a_2e_2 - a_3e_3$$

Konjugat kompleks dari a adalah

$$a^* = \overline{a_0} + \overline{a_1}e_1 + \overline{a_2}e_2 + \overline{a_3}e_3$$

Konjugat hermitian dari a adalah

$$a^\dagger = (\bar{a})^* = \overline{a_0} - \overline{a_1}e_1 - \overline{a_2}e_2 - \overline{a_3}e_3$$

Norm lemah dari a adalah

$$n(a) = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

Sebuah quaternion $a \in \mathbb{H}$ disebut real jika $a^* = a$, *imajiner murni* jika $a^* = -a$, *skalar* jika $\bar{a} = a$, dan *Hermitian* jika $a^\dagger = a$. Untuk sebarang $A = (a_{st}) \in \mathbb{H_C}^{m\,x\,n}$, *dual* dari A adalah $\bar{A} = (\overline{a_{ts}}) \in \mathbb{H_C}^{n\,x\,m}$. *Konjugat hermitian* dari A adalah $A^\dagger = \left(a_{ts}^\dagger\right) \in \mathbb{H_C}^{m\,x\,n}$. Sebuah matriks persegi A disebut *self-dual* jika $\bar{A} = A$, *Hermitian* jika $A^\dagger = A$, *unity* jika $AA^\dagger = A^\dagger A = I$, untuk I adalah matriks identitas, *invertible* jika terdapat matriks B atas Q sedemikian sehingga $AB = BA = I$.

G. Determinan matriks Quaternion Kompleks

Mendefinisikan suatu determinan dari matriks quaternion adalah melalui representasi dalam bidang pusat *(field central)*. Secara sederhana, definisi *(Tian, Yongge: 2000)* dalam menentukan determinan dari $A \in \mathbb{Q}^{nxn}$ yaitu ;

Misal : $A = A_0 + A_1e_1 + A_2e_2 + A_3e_3$ sehingga determinan matriks dari A direpresentasikan melalui sebagai berikut ;

$$\det A \ := \ |\Psi\ (A)|.$$

Di mana $|\Psi\ (A)|$ adalah determinan dari matriks kompleks $\Psi\ (A)$. Dalam hal ini $\Psi\ (A)$ merupakan isomorfisma dari matriks quaternion kompleks ke matriks kompleks dan persamaan diatas yang merupakan definisi dari determinan matriks bilangan quaternion $\mathbb{Q}$ dan dapat juga disebut dengan *determinan central* dari matriks *A*, dan dapat ditulis sebagai $|A|_c$. Sehingga, dapat disimpulkan bahwa $\det A \ := \ |\Psi\ (A)| \ := \ |A|_c$

H. Sifat Determinan Matriks Quaternion Kompleks

Misalkan diberikan $A = A_0 + A_1e_1 + A_2e_2 + A_3e_3,\ B = B_0 + B_1e_1 + B_2e_2 + B_3e_3 \ \in \ \mathbb{Q}^{nxn}, \lambda \in \mathbb{C}, dan\ \mu \in \mathbb{Q}$, maka berlaku*(Tian, Yongge: 2000):*

(a) A mempunyai invers jika dan hanya jika $|A|_c \ \neq 0.$
(b) $|AB|_c = |A|_c|B|_c$
(c) $|\lambda A|_c = |A\lambda|_c = \lambda^{2n}|A|_c$
(d) $|\mu A|_c = |A\mu|_c = (n)\mu^n|A|_c$
(e) $|A^{-1}|_c = |A|_c^{-1}$
(f) $\left|A^\dagger\right|_c = \overline{|A|}_c$
(g) Jika $A = \begin{bmatrix} A_1 & * \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$, dimana A_1 dan A_2 matriks persegi,
maka $|A|_c = \ |A_1|_c|A_2|_c$
(h) Jika $A \sim B$, maka $|A|_c = \ |B|_c$

DAFTAR PUSTAKA

Haryanto, Loeky., Erawati, Nur. 2009. *Modul Pembelajaran Matakuliah Struktur Aljabar*, hal : 42. Makassar : FMIPA unhas.

Haryahnto, Loeky., Kamal Amir, Amir. 2013. *Modul Pembelajaran Matakuliah Struktur Aljabar 2*, hal : 16-17

Morais, Joao Pedro. dkk. 2014. *Real Quaternionic Calculus Handbook*. Basel : Springer Basel

Pierce, Richard S. 1982. *Associative Algebras*. New York : Springer-Verlag.

Tian, Yongge. 2000. *Matrix Theory over the Complex Quaternion Algebra*. Canada : Department of Mathematics and Statistics Queen's University